Компьютерные инструменты в образовании, 2026
№ 1: 5–21
УДК: 519.8
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2026-1-5-21

РЕШЕНИЕ ДВУХКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОЕКТОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ТРОПИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Кривулин Н. К.[1], ✉ nkk@math.spbu.ru, orcid.org/0000-0003-3070-9355
Симоненко В. В.[1], vadimka.simonenko@gmail.com

[1]Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация

В статье рассматриваются двухкритериальные задачи планирования сроков проекта, который состоит в выполнении заданного набора работ при наличии ограничений на время начала и завершения работ. В качестве критериев оптимальности плана для одной из задач берутся максимальное время рабочего цикла и разброс времени начала работ, которые требуется минимизировать. Другая задача состоит в минимизации общей продолжительности проекта и разброса времени начала работ. Решение задач опирается на их представление в терминах тропической алгебры, которая изучает алгебраические системы с идемпотентными операциями. С помощью методов тропической оптимизации получены результаты, которые в аналитической форме описывают все Парето-оптимальные решения рассматриваемых задач, представленные в параметрическом виде. Приведены иллюстративные численные примеры решения двухкритериальных задач для проекта, который состоит из трех работ.

Ключевые слова: *тропическая оптимизация, задачи двухкритериальной оптимизации, Парето-оптимальность, планирование проектов, временные ограничения.*

Цитирование: Кривулин Н. К., Симоненко В. В. Решение двухкритериальных задач планирования проектов с помощью методов тропической оптимизации // Компьютерные инструменты в образовании. 2026. № 1. С. 5–21. doi:10.32603/2071-2340-2026-1-5-21

1. ВВЕДЕНИЕ

Управление проектом заключается в организации действий, направленных на достижение целей проекта при эффективном использовании всех доступных ресурсов [1]. Оптимизация временных аспектов является одним из основных элементов управления проектом, включая составление, анализ и корректировку графика выполнения работ с учетом различных ограничений и условий.

Для решения задач планирования с временными ограничениями и критериями оптимальности традиционно используется широкий спектр методов сетевого планирования.

Сетевое планирование представляет собой комплекс подходов с представлением проектов в виде графов и сетей. Концептуальные основы сетевого планирования были заложены при разработке диаграмм Ганта в начале XX века, в 1950-х годах оно получило значительное развитие с появлением метода критического пути (Critical Path Method, CPM) и метода оценки и пересмотра планов (Program Evaluation and Review Technique, PERT) [2–4]. Эти методы направлены на моделирование, анализ и оптимизацию последовательности и продолжительности выполнения работ проекта, обеспечивая составление календарных планов, выявление критически важных задач и управление сроками проекта с учетом технологических зависимостей и имеющихся ресурсов.

Для решения задач планирования при наличии ограничений различной природы (ресурсных, временных, логических) применяются методы оптимизации, включая методы линейного программирования, смешанного целочисленного линейного программирования, комбинаторной оптимизации и др. [5, 6]. Для задач с несколькими критериями оптимальности плана используются методы и алгоритмы многокритериальной оптимизации [7]. В случае многокритериальной задачи целью решения является нахождение Парето-оптимального плана, который не может быть улучшен ни по одному критерию без ухудшения решения по какому-либо другому критерию [8, 9].

Задача оптимального планирования формулируется как задача оптимизации, в которой минимизируется (максимизируется) одна или несколько целевых функций (например, общая длительность проекта, его стоимость, или равномерность загрузки ресурсов) при условии выполнения различных ограничений в форме системы равенств и неравенств. Существующие методы обычно предлагают алгоритмические решения, которые позволяют получать численные результаты посредством итерационных вычислительных процедур. Такие подходы не гарантируют нахождение аналитического решения в явном виде, что может быть важно для формального анализа структуры оптимального плана и его чувствительности к изменению параметров проекта.

Для решения задач временного планирования проектов (в которых учитываются только временные ограничения и критерии оптимальности) в последние десятилетия развивается новый подход на основе использования тропической алгебры, которая представляет собой область математики, связанную с изучением теории и приложений алгебраических систем с идемпотентными операциями [10–15]. Задачи планирования формулируются и решаются как задачи оптимизации в терминах тропической алгебры (задачи тропической оптимизации). Для многих задач планирования применение методов тропической оптимизации позволяет получить результат в аналитической форме, при которой все решения задачи записываются в параметрическом виде [16–25]. Такие решения оказываются удобными как для формального анализа, так и для непосредственных расчетов с невысокой вычислительной сложностью.

В работе [26] методы тропической алгебры используются для решения двухкритериальных задач планирования с целью минимизации максимального времени рабочего цикла и общей продолжительности проекта при разных наборах ограничений. Сначала рассматривается двухкритериальная задача тропической оптимизации в общем виде с ограничениями, для которой находятся все Парето-оптимальные решения, записанные в компактной параметрической форме. Затем полученный общий результат уточняется, чтобы построить аналитические решения указанных задач планирования.

Методы тропической оптимизации оказываются полезными при решении других многокритериальных задач. Пример решения двухкритериальной задачи оценки альтернатив на основе парных сравнений при принятии решений представлен в [27].

В настоящей работе рассматриваются новые двухкритериальные задачи планирования сроков проекта, который состоит в выполнении заданного набора работ при наличии ограничений на время начала и завершения работ. В качестве критериев оптимальности плана для одной из задач берутся максимальное время рабочего цикла и разброс времени начала работ, которые требуется минимизировать. Другая задача состоит в минимизации общей продолжительности проекта и разброса времени начала работ. Обе задачи сначала формулируются как обычные минимаксные задачи оптимизации, а затем преобразуются в задачи тропической оптимизации. В качестве инструмента решения полученных задач оптимизации используется общий результат из работы [26], на основе которого с учетом особой формы представления критериев строятся все Парето-оптимальные решения задач планирования в параметрическом виде. Для одной из рассматриваемых задач полученный результат удается существенно упростить с использованием техники, предложенной в работе [24]. Приведены иллюстративные численные примеры решения двухкритериальных задач для проекта, состоящего из трех работ.

2. ДВУХКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОЕКТОВ

Рассмотрим проект, состоящий из n работ (заданий, операций, процессов), которые могут выполняться параллельно и должны удовлетворять определенным временным ограничениям. Задача состоит в составлении оптимального графика работ в смысле наилучшего компромиссного решения в отношении двух различных критериев, которые будут описаны ниже.

Для каждой работы $i = 1, \ldots, n$ обозначим время начала и время завершения работы через x_i и y_i, и предположим, что на эти переменные накладываются следующие ограничения. Пусть g_i указывает самое раннее допустимое время начала работы, а h_i — наиболее позднее время начала работы, которые задают для величины x_i нижнюю и верхнюю границы, что приводит к двойному неравенству

$$g_i \leq x_i \leq h_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Минимально допустимый временной интервал a_{ij} между началом работы j и завершением работы i задает ограничения “старт-финиш” в форме неравенств

$$a_{ij} + x_j \leq y_i, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

где $a_{ij} = -\infty$, если интервал a_{ij} не определен. Объединение неравенств по всем j дает эквивалентное неравенство

$$\max_{1 \leq j \leq n} (a_{ij} + x_j) \leq y_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

При этом предполагается, что каждая работа завершается немедленно, как только для нее все ограничения “старт-финиш” будут выполнены, что приводит к равенствам

$$\max_{1 \leq j \leq n} (a_{ij} + x_j) = y_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Для разработки оптимального графика работ рассмотрим несколько критериев оптимальности, которые включают минимизацию максимального времени рабочего цикла, а также максимальной продолжительности выполнения проекта и максимального разброса времени начала работ.

Время цикла для работы i определяется как разность $y_i - x_i$ между временем окончания и начала. Максимальное время цикла по всем работам определяется так:

$$\max_{1\leq i\leq n}(y_i - x_i).$$

Продолжительность проекта, считается стандартным показателем эффективности плана работ, который необходимо минимизировать. Этот показатель определяется как разность между самым поздним временем завершения и самым ранним временем начала работ в виде

$$\max_{1\leq i\leq n} y_i - \min_{1\leq i\leq n} x_i = \max_{1\leq i\leq n} y_i + \max_{1\leq i\leq n}(-x_i).$$

Максимальный разброс времени начала работ — это показатель, который часто используется для оценки синхронности начала выполнения различных задач. Этот показатель рассчитывается как разность между максимальным и минимальным временем начала работ и выражается следующим образом:

$$\max_{1\leq i\leq n} x_i - \min_{1\leq i\leq n} x_i = \max_{1\leq i\leq n} x_i + \max_{1\leq i\leq n}(-x_i).$$

Сформулируем двухкритериальные задачи составления оптимального плана работ в соответствии с указанными ограничениями и введенными критериями. Сначала предположим, что при заданных значениях параметров a_{ij}, g_i и h_i для всех $i, j = 1, \ldots, n$, необходимо определить значения неизвестных x_i и y_i, чтобы минимизировать время цикла и разброс времени начала работ. Имеем задачу в виде

$$\begin{aligned} \min_{x_1,\ldots,x_n>0} \quad & \left\{\max_{1\leq i\leq n}(y_i - x_i),\ \max_{1\leq i\leq n} x_i + \max_{1\leq i\leq n}(-x_i)\right\}, \\ & \max_{1\leq j\leq n}(a_{ij} + x_j) = y_i, \qquad g_i \leq x_i \leq h_i, \qquad i = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим также задачу минимизации продолжительности проекта и разброса времени начала работ. В этом случае при тех же параметрах необходимо найти значения x_i и y_i, при которых достигается минимум

$$\begin{aligned} \min_{x_1,\ldots,x_n>0} \quad & \left\{\max_{1\leq i\leq n}(y_i) + \max_{1\leq i\leq n}(-x_i),\ \max_{1\leq i\leq n} x_i + \max_{1\leq i\leq n}(-x_i)\right\}, \\ & \max_{1\leq j\leq n}(a_{ij} + x_j) = y_i, \qquad g_i \leq x_i \leq h_i, \qquad i = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{2}$$

В следующих разделах будут применены методы и результаты тропической оптимизации для построения прямого аналитического решения рассматриваемых задач.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТРОПИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ

В этом разделе представлены основные обозначения и определения тропической математики [10–15], которые используются в дальнейшем. Рассмотрим множество $\mathbb{X}$, которое замкнуто относительно ассоциативных и коммутативных операций сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$, и имеет нейтральные элементы: нуль $\mathbb{0}$ и единицу $\mathbb{1}$. Сложение является идемпотентным, то есть $x \oplus x = x$ для любого $x \in \mathbb{X}$, а умножение дистрибутивно относительно сложения и имеет для каждого $x \in \mathbb{X} \setminus \{\mathbb{0}\}$ обратный элемент x^{-1} такой, что $x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$. Алгебраическую структуру $(\mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes)$ обычно называют идемпотентным полуполем. Для удобства знак умножения $\otimes$ в выражениях далее будет опускаться.

Для любого $x \neq \mathbb{0}$ и натурального числа n определены степени $x^0 = \mathbb{1}$, $x^n = xx^{n-1}$ и $x^{-n} = (x^{-1})^n$. Более того, предполагается, что полуполе является алгебраически полным в том смысле, что уравнение $x^n = a$ имеет единственное решение x для любого $a \in \mathbb{X}$ и натурального n, что позволяет определить рациональные степени.

Идемпотентное сложение вводит частичный порядок на $\mathbb{X}$ такой, что $x \leq y$ если и только если $x \oplus y = y$. В терминах этого порядка, операции сложения и умножения являются монотонными, то есть из $x \leq y$ следует $x \oplus z \leq y \oplus z$ и $xz \leq yz$ для любых $x, y, z \in \mathbb{X}$. Операция обращения обладает свойством антитонности, то есть из $x \leq y$ для всех $x, y \neq \mathbb{0}$ следует $x^{-1} \geq y^{-1}$. Идемпотентное сложение имеет экстремальное свойство: $x \leq x \oplus y$ и $y \leq x \oplus y$ для любых $x, y \in \mathbb{X}$. Кроме того, неравенство $x \oplus y \leq z$ эквивалентно двум неравенствам $x \leq z$ и $y \leq z$. Будем предполагать, что указанный частичный порядок дополнен до линейного порядка на $\mathbb{X}$.

Для любых $x, y \in \mathbb{X}$ и целого $m \geq 0$ идемпотентный аналог биномиальной формулы имеет вид $(x \oplus y)^m = x^m \oplus x^{m-1} y \oplus \cdots \oplus y^m$. Из этой формулы для $m = 2$ следует неравенство $(xy)^{1/2} \leq x \oplus y$, аналогичное неравенству между геометрическим и арифметическим средними двух положительных чисел. Для произвольного целого $m > 0$ и $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{X}$ неравенство принимает форму $(x_1 \cdots x_m)^{1/m} \leq x_1 \oplus \cdots \oplus x_m$.

Примером алгебраической структуры рассмотренного типа является полуполе

$$\mathbb{R}_{\max,+} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, -\infty, 0, \max, +),$$

где $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел. В этом полуполе сложение $\oplus$ соответствует максимуму, а умножение $\otimes$ — обычному сложению, при этом $\mathbb{0}$ определяется как $-\infty$, а $\mathbb{1}$ — как 0. Обычно полуполе $\mathbb{R}_{\max,+}$ называют $(\max, +)$-алгеброй.

Пусть $\mathbb{X}^{m \times n}$ обозначает множество матриц размером $m \times n$ над $\mathbb{X}$. Матрица, все элементы которой равны $\mathbb{0}$, называется нулевой матрицей.

Сложение и умножение матриц, а также умножение матриц на скаляры, следуют стандартным правилам, где скалярные арифметические операции заменяются на $\oplus$ и $\otimes$. Операции над матрицами являются монотонными: из неравенства $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$ следует

$$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{C} \leq \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{C}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{C} \leq \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}, \qquad x\boldsymbol{A} \leq x\boldsymbol{B}$$

для всех матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ соответствующих размеров и скаляра x.

Транспонирование матрицы $\boldsymbol{A}$ обозначается как $\boldsymbol{A}^T$. Для ненулевой матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ определена мультипликативно сопряженная транспонированная матрица $\boldsymbol{A}^- = (a_{ij}^-)$ с элементами $a_{ij}^- = a_{ji}^{-1}$, если $a_{ji} \neq \mathbb{0}$, и $a_{ij}^- = \mathbb{0}$ в противном случае.

Рассмотрим квадратные матрицы в $\mathbb{X}^{n \times n}$. Единичная матрица $\boldsymbol{I}$ имеет элементы, равные $\mathbb{1}$ на диагонали и $\mathbb{0}$ вне ее. След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$

Для матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ подходящего размера справедливы равенства:

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \operatorname{tr} \boldsymbol{B}, \qquad \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}), \qquad \operatorname{tr}(x\boldsymbol{A}) = x \operatorname{tr} \boldsymbol{A}. \tag{3}$$

Для любой квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка n определена функция

$$\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^n.$$

Если $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, матрица Клини вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}.$$

Обозначим через $\mathbb{X}^n$ множество векторов-столбцов размерности n. Вектор, состоящий из нулей, называется нулевыми и обозначается символом $\mathbf{0}$. Вектор из единиц обозначается символом $\mathbf{1} = (\mathbb{1}, \dots, \mathbb{1})^T$. Вектор без нулевых элементов называется регулярным. Для ненулевого вектора $\boldsymbol{x} = (x_i)$ сопряженно-транспонированный вектор $\boldsymbol{x}^- = (x_i^-)$ имеет элементы $x_i^- = x_i^{-1}$, если $x_i \neq \mathbb{0}$, и $x_i^- = \mathbb{0}$ в противном случае.

Скаляр λ является собственным числом матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$, если существует ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, удовлетворяющий равенству $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$. Спектральный радиус определяется как максимальное собственное число и вычисляется по формуле

$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n).$$

Для любой матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ и вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ норма определяется так:

$$\|\boldsymbol{A}\| = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn} = \mathbf{1}^T \boldsymbol{A} \mathbf{1}, \qquad \|\boldsymbol{x}\| = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = \mathbf{1}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \mathbf{1}.$$

4. ДВУХКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ТРОПИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Сформулируем и опишем решение двухкритериальной задачи тропической оптимизации, которая используется в следующем разделе для решения задач планирования. В целях компактности и общности изложения задача тропической оптимизации и ее решение описываются в терминах общего идемпотентного полуполя $(\mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes)$.

Предположим, что задана ненулевая квадратная матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ и ненулевые векторы $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} \in \mathbb{X}^n$, где $\boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{h}$. Необходимо найти регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, которые являются решениями двухкритериальной задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x} > \mathbf{0}} \quad & \{\boldsymbol{x}^- \boldsymbol{A} \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{p} \boldsymbol{q}^- \boldsymbol{x}\}; \\ & \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h}. \end{aligned} \tag{4}$$

Для решения этой задачи оптимизации применим теорему, доказанную в статье [26].

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — ненулевая матрица, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$ — ненулевые векторы такие, что $\boldsymbol{h}^- \boldsymbol{g} \leq \mathbb{1}$. Введем следующие обозначения:*

$$\begin{aligned} &\lambda = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{A}^k), \qquad \mu = \bigoplus_{k=1}^{n-1} (\boldsymbol{h}^- \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{g})^{1/k}, \qquad \nu = \boldsymbol{q}^- \boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{h}^- \boldsymbol{p} \boldsymbol{q}^- \boldsymbol{g}; \\ &G(s) = \bigoplus_{k=1}^{n-1} s^{-k} (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{p}) \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-2} s^{-k} \bigoplus_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} (\boldsymbol{h}^- \boldsymbol{A}^i \boldsymbol{p})(\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{A}^j \boldsymbol{g}), \qquad s > \mathbb{0}; \\ &H(t) = \bigoplus_{k=1}^{n-1} t^{-1/k} (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{p})^{1/k} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-2} t^{-1/k} \bigoplus_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} (\boldsymbol{h}^- \boldsymbol{A}^i \boldsymbol{p})^{1/k} (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{A}^j \boldsymbol{g})^{1/k}, \qquad t > \mathbb{0}. \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Если $\lambda \oplus \mu \geq H(\nu)$, то Парето-фронт для задачи (4) вырождается в единственную точку (α, β), где*

$$\alpha = \lambda \oplus \mu, \qquad \beta = \nu.$$

2. *В противном случае Парето-фронт образует множество точек (α,β), координаты которых задаются условиями*
$$\lambda\oplus\mu\leq\alpha\leq H(\nu),\qquad \beta=G(\alpha).$$
3. *Все Парето-оптимальные решения записываются в параметрической форме*
$$\boldsymbol{x}=(\alpha^{-1}\boldsymbol{A}\oplus\beta^{-1}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-})^{*}\boldsymbol{u},\qquad \boldsymbol{g}\leq\boldsymbol{u}\leq(\boldsymbol{h}^{-}(\alpha^{-1}\boldsymbol{A}\oplus\beta^{-1}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-})^{*})^{-}. \tag{6}$$

5. ПРИЛОЖЕНИЕ К ДВУХКРИТЕРИАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ ПЛАНИРОВАНИЯ

Вернемся к задаче оптимального планирования (1) и запишем ее в терминах $(\max,+)$-алгебры в виде задачи тропической оптимизации.
$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}}\left\{\bigoplus_{i=1}^{n}y_ix_i^{-1},\ \bigoplus_{i=1}^{n}x_i\bigoplus_{j=1}^{n}x_j^{-1}\right\};\\&\bigoplus_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=y_i,\qquad g_i\leq x_i\leq h_i,\qquad i=1,\dots,n.\end{aligned}$$

Чтобы сформулировать задачу в векторной форме, введем матрицу и векторы
$$\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\qquad \boldsymbol{x}=(x_i),\qquad \boldsymbol{y}=(y_i),\qquad \boldsymbol{g}=(g_i),\qquad \boldsymbol{h}=(h_i).$$

Тогда векторная функция критериев записывается в виде $\{\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{T}\boldsymbol{x}\}$, а ограничения — в виде $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{g}\leq\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{h}$. После подстановки $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ в функцию критериев получим задачу двухкритериальной оптимизации
$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}}\{\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{T}\boldsymbol{x}\};\\&\boldsymbol{g}\leq\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{h}.\end{aligned}\tag{7}$$

Для решения задачи (7) воспользуемся результатом теоремы 1. Полученное решение будет представлено в более компактной форме, что станет возможным благодаря особой структуре целевой функции задачи. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — ненулевая матрица, $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$ — ненулевые векторы такие, что $\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{g}\leq\mathbb{1}$. Введем следующие обозначения:*
$$\begin{aligned}&\lambda=\bigoplus_{k=1}^{n}\operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{A}^{k}),\qquad \mu=\bigoplus_{k=1}^{n-1}(\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{g})^{1/k},\qquad \nu=\mathbb{1}\oplus\|\boldsymbol{h}^{-}\|\|\boldsymbol{g}\|;\\&G(s)=\bigoplus_{k=1}^{n-1}s^{-k}\|\boldsymbol{A}^{k}\|\oplus\bigoplus_{k=1}^{n-2}s^{-k}\bigoplus_{\substack{i+j=k\\i,j\geq0}}\|\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{A}^{i}\|\|\boldsymbol{A}^{j}\boldsymbol{g}\|,\qquad s>\mathbb{0};\\&H(t)=\bigoplus_{k=1}^{n-1}t^{-1/k}\|\boldsymbol{A}^{k}\|^{1/k}\oplus\bigoplus_{k=1}^{n-2}t^{-1/k}\bigoplus_{\substack{i+j=k\\i,j\geq0}}(\|\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{A}^{i}\|\|\boldsymbol{A}^{j}\boldsymbol{g}\|)^{1/k},\qquad t>\mathbb{0}.\end{aligned}\tag{8}$$

Тогда верны следующие утверждения:

1. *Если $\lambda\oplus\mu\geq H(\nu)$, то Парето-фронт для задачи (7) вырождается в одну точку (α,β), где*
$$\alpha=\lambda\oplus\mu,\qquad \beta=\nu.$$

2. *В противном случае Парето-фронт образует множество точек* (α, β)*, координаты которых задаются условиями*

$$\lambda \oplus \mu \le \alpha \le H(\nu), \qquad \beta = G(\alpha).$$

3. *Все Парето-оптимальные решения записываются в параметрической форме*

$$\boldsymbol{x} = (\alpha^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T)^*\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{g} \le \boldsymbol{u} \le (\boldsymbol{h}^-(\alpha^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T)^*)^-. \tag{9}$$

Доказательство. Воспользуемся результатом теоремы 1. Положим $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{1}$ и $\boldsymbol{q}^- = \boldsymbol{1}^T$ и заметим, что тогда выполняются равенства

$$\boldsymbol{q}^-\boldsymbol{p} = \mathbb{1}, \qquad \boldsymbol{h}^-\boldsymbol{p} = \|\boldsymbol{h}^-\|, \qquad \boldsymbol{q}^-\boldsymbol{g} = \|\boldsymbol{g}\|,$$
$$\boldsymbol{q}^-\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{p} = \|\boldsymbol{A}^k\|, \qquad \boldsymbol{h}^-\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{p} = \|\boldsymbol{h}^-\boldsymbol{A}^i\|, \qquad \text{ă}\boldsymbol{q}^-\boldsymbol{A}^j\boldsymbol{g} = \|\boldsymbol{A}^j\boldsymbol{g}\|.$$

С учетом этих равенств формулы (5) принимают вид (8), а множество решений (6) записывается в виде (9). □

Теперь применим теорему 1 для решения задачи (2), которую можно сформулировать в терминах $(\max, +)$-алгебры так:

$$\min_{\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}} \left\{ \bigoplus_{i=1}^{n} y_i \bigoplus_{j=1}^{n} x_j^{-1}, \ \bigoplus_{i=1}^{n} x_i \bigoplus_{j=1}^{n} x_j^{-1} \right\};$$
$$\bigoplus_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = y_i, \qquad g_i \le x_i \le h_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

В результате представления в векторной форме функция критериев принимает вид $\{\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{y}, \ \boldsymbol{x}^-\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{x}\}$, а ограничения — вид $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{g} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{h}$. После подстановки $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ в функцию критериев получим задачу двухкритериальной оптимизации

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}} \quad & \{\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{x}^-\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{x}\}; \\ & \boldsymbol{g} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{h}. \end{aligned} \tag{10}$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *— ненулевая матрица,* $\boldsymbol{g}$ *и* $\boldsymbol{h}$ *— ненулевые векторы такие, что* $\boldsymbol{h}^-\boldsymbol{g} \le \mathbb{1}$*. Введем следующие обозначения:*

$$\lambda = \|\boldsymbol{A}\|, \qquad \mu = \|\boldsymbol{A}\| \bigoplus_{k=1}^{n-1} (\|\boldsymbol{A}\|^{-1}\|\boldsymbol{h}^-\|\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}\|)^{1/k}, \qquad \text{ă}\nu = \mathbb{1} \oplus \|\boldsymbol{h}^-\|\|\boldsymbol{g}\|. \tag{11}$$

Тогда верны следующие утверждения:

1. *Парето-фронт для задачи* (10) *вырождается в одну точку* (α, β)*, где*

$$\alpha = \lambda \oplus \mu, \qquad \beta = \nu.$$

2. *Все Парето-оптимальные решения записываются в параметрической форме*

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} \oplus \alpha^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T)\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{g} \le \boldsymbol{u} \le (\boldsymbol{h}^-(\boldsymbol{I} \oplus \alpha^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T))^-. \tag{12}$$

Доказательство. Используем результат теоремы 1. Заменим в формулах (5) и (6) векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ на $\boldsymbol{1}$, а матрицу $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A}$. Тогда, в частности, $\nu = \mathbb{1} \oplus \|\boldsymbol{h}^-\|\|\boldsymbol{g}\| \geq \|\boldsymbol{h}^-\|\|\boldsymbol{g}\|$.

Рассмотрим степени матрицы $\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A}$. Для любого $k > 0$ будем иметь

$$(\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A})^k = \boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A} = \|\boldsymbol{A}\|^{k-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A}.$$

Заметим, что тогда $\|\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A}\| = \|\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{1}\| = \|\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{1}\| = \|\boldsymbol{A}\|$.

Для вычисления следа $\mathrm{tr}(\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A})^k$ используем свойства (3). Сначала заметим, что $\mathrm{tr}(\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{1}) = \|\boldsymbol{A}\|$. Отсюда следует, что $\mathrm{tr}(\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A})^k = \|\boldsymbol{A}\|^k$.

Вычисление значения λ приводит к следующему результату:

$$\lambda = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A})^k = \|\boldsymbol{A}\|.$$

После замены $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A}$ выражение для μ принимает вид

$$\mu = \|\boldsymbol{A}\| \bigoplus_{k=1}^{n-1} (\|\boldsymbol{A}\|^{-1}\|\boldsymbol{h}^-\|\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}\|)^{1/k}.$$

Покажем, что для рассматриваемой задачи выполняется условие $\lambda \oplus \mu \geq H(\nu)$, при котором Парето-фронт вырождается в точку. Заметим, что при этом вычислять значение функции $G(\alpha)$ не потребуется.

Выражение под знаком суммы для первого слагаемого функции $H(t)$ записывается в следующей форме:

$$t^{-1/k}\|(\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A})^k\|^{1/k} = \|\boldsymbol{A}\|t^{-1/k}.$$

Для второго слагаемого имеем

$$t^{-1/k} \bigoplus_{\substack{i+j=k \\ i,j\geq 0}} \|\boldsymbol{h}^-(\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A})^i\|^{1/k}\|(\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A})^j\boldsymbol{g}\|^{1/k} = \|\boldsymbol{A}\|t^{-1/k}(\|\boldsymbol{h}^-\|\|\boldsymbol{A}\|^{-1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}\|)^{1/k}.$$

Теперь функцию $H(t)$ можно записать в виде

$$H(t) = \|\boldsymbol{A}\| \left(\bigoplus_{k=1}^{n-1} t^{-1/k} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-2} t^{-1/k}(\|\boldsymbol{h}^-\|\|\boldsymbol{A}\|^{-1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}\|)^{1/k} \right). \tag{13}$$

Заметим, что в формулировке теоремы 1 для функции $H(t)$ используется только значение при $t = \nu$. Рассмотрим первое слагаемое в круглых скобках в формуле (13) при $t = \nu$. Поскольку $\nu \geq \mathbb{1}$, для любого $k \geq 1$ справедливо $\nu^{-1/k} \leq \mathbb{1}$. Следовательно,

$$\bigoplus_{k=1}^{n-1} \nu^{-1/k} \leq \mathbb{1}.$$

Чтобы упростить второе слагаемое, воспользуемся условием $\nu \geq \|\boldsymbol{h}^-\|\|\boldsymbol{g}\|$. При этом условии для любого $k \geq 1$ получаем:

$$(\nu^{-1}\|\boldsymbol{h}^-\|\|\boldsymbol{A}\|^{-1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}\|)^{1/k} \leq (\|\boldsymbol{h}^-\|^{-1}\|\boldsymbol{g}\|^{-1}\|\boldsymbol{h}^-\|\|\boldsymbol{A}\|^{-1}\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{g}\|)^{1/k} = \mathbb{1},$$

что приводит к неравенству:

$$\text{ăă}\bigoplus_{k=1}^{n-2} \nu^{-1/k}(\|\boldsymbol{h}^-\|\|\boldsymbol{A}\|^{-1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}\|)^{1/k} \leq \mathbb{1}.$$

Объединяя результаты, получаем $H(\nu) \leq \|\boldsymbol{A}\| = \lambda$, откуда следует, что $H(\nu) \leq \lambda \oplus \mu$, а потому Парето-фронт вырождается в единственную точку.

Рассмотрим матрицу Клини в формулах (6), которая для рассматриваемой задачи приобретает вид $(\alpha^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T)^*$. Введем матрицу

$$\boldsymbol{B} = \alpha^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T = \mathbf{1}\mathbf{1}^T(\alpha^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\boldsymbol{I}).$$

Заметим, что $\|\boldsymbol{B}\| = \alpha^{-1}\|\boldsymbol{A}\| \oplus \beta^{-1}$. Тогда матрицу $\boldsymbol{B}^2$ можно представить так

$$\boldsymbol{B}^2 = \mathbf{1}\mathbf{1}^T(\alpha^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\boldsymbol{I})\mathbf{1}\mathbf{1}^T(\alpha^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\boldsymbol{I}) = \|\boldsymbol{B}\|\boldsymbol{B}.$$

Нетрудно проверить, что для матрицы $\boldsymbol{B}^m$ при всех $m \geq 1$ выполняется равенство

$$\boldsymbol{B}^m = \|\boldsymbol{B}\|^{m-1}\boldsymbol{B}$$

Теперь матрица Клини записывается в следующем виде:

$$(\alpha^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T)^* = \boldsymbol{B}^* = \bigoplus_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{B}^k = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{B}\bigoplus_{k=0}^{n-2}\|\boldsymbol{B}\|^k.$$

Рассмотрим полученную матрицу Клини. Так как Парето-фронт вырождается в одну точку, то $\alpha = \lambda \oplus \mu \geq \lambda = \|\boldsymbol{A}\|$, а $\beta = \nu \geq \mathbb{1}$.

Из полученных неравенств для α и β следует, что $\alpha^{-1}\|\boldsymbol{A}\| \leq \mathbb{1}$ и $\beta^{-1} \leq \mathbb{1}$.

Тогда $\|\boldsymbol{B}\| = \alpha^{-1}\|\boldsymbol{A}\| \oplus \beta^{-1} \leq \mathbb{1}$, а следовательно $\|\boldsymbol{I}\| \oplus \|\boldsymbol{B}\| \oplus \cdots \oplus \|\boldsymbol{B}^{n-2}\| = \mathbb{1}$.

Окончательно получим матрицу Клини в форме

$$(\alpha^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T)^* = \boldsymbol{I} \oplus \alpha^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T,$$

откуда следуют формулы (12). □

Заметим, что вычисления в соответствии с описанными в леммах 1 и 2 решениями требует выполнения некоторого конечного числа простых матрично-векторных операций, а потому эти решения могут быть без труда масштабированы на задачи планирования с большим числом работ и ограничений.

6. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ДВУХКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ

В этом разделе приведены примеры решения задач планирования малой размерности с целью продемонстрировать вычислительную технику, используемую для расчетов. Учитывая естественную масштабируемость полученных решений, вычислительные процедуры для задач большой размерности принципиальных отличий иметь не будут.

6.1. Минимизации времени цикла и разброса времени начала работ

Рассмотрим задачу (7) минимизации максимального времени цикла и максимального разброса времени начала работ. Пусть имеется проект с количеством работ $n = 3$ при ограничениях “старт-финиш” и ограничениях на время начала работ, заданных следующей матрицей и векторами:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы построить оптимальный план работ, минимизирующий время цикла и разброс времени начала работ, используем лемму 1. Сначала найдем матрицы

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 6 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

а затем вычислим

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A} = 1, \qquad \operatorname{tr}\boldsymbol{A}^2 = 5, \qquad \operatorname{tr}\boldsymbol{A}^3 = 8, \qquad \|\boldsymbol{A}\| = 4, \qquad \|\boldsymbol{A}^2\| = 6.$$

Теперь найдем векторы

$$\boldsymbol{h}^- = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{h}^-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix},$$

чтобы использовать их для нахождения следующих величин:

$$\|\boldsymbol{h}^-\| = -1, \qquad \|\boldsymbol{h}^-\boldsymbol{A}\| = 1, \qquad \boldsymbol{h}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{g} = 2, \qquad \boldsymbol{h}^-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{g} = 5,$$
$$\|\boldsymbol{g}\| = 2, \qquad \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}\| = 5, \qquad \|\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{g}\| = 7.$$

Применим полученные результаты для определения значений

$$\lambda = \operatorname{tr}\boldsymbol{A} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}^2) \oplus \operatorname{tr}^{1/3}(\boldsymbol{A}^3) = 8/3, \qquad \mu = \boldsymbol{h}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{g} \oplus (\boldsymbol{h}^-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{g})^{1/2} = 5/2,$$
$$\nu = 0 \oplus \|\boldsymbol{h}^-\|\|\boldsymbol{g}\| = 1.$$

Наконец, построим функции

$$G(s) = s^{-2}\|\boldsymbol{A}^2\| \oplus s^{-1}(\|\boldsymbol{A}\| \oplus \|\boldsymbol{h}^-\|\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}\| \oplus \|\boldsymbol{h}^-\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{g}\|) = 6s^{-2} \oplus 4s^{-1},$$
$$H(t) = t^{-1}(\|\boldsymbol{A}\| \oplus \|\boldsymbol{h}^-\|\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}\| \oplus \|\boldsymbol{h}^-\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{g}\|) \oplus t^{-1/2}\|\boldsymbol{A}^2\|^{1/2} = 4t^{-1} \oplus 3t^{-1/2}.$$

Учитывая выполнение равенств $\lambda \oplus \mu = 8/3$ и $H(\nu) = 4\nu^{-1} \oplus 3\nu^{-1/2} = 3$, заключаем, что $\lambda \oplus \mu < H(\nu)$. Тогда из леммы 1 следует, что Парето-фронтом задачи является множество точек (α, β) с координатами $8/3 \le \alpha \le 3$ и $\beta = 6\alpha^{-2} \oplus 4\alpha^{-1}$.

Заметим, что для всех $\alpha \ge 8/3$ выполняется $4\alpha \ge 20/3 > 6$, из чего следует $4\alpha^{-1} > 6\alpha^{-2}$. В результате, координаты Парето-фронта можно уточнить так: $8/3 \le \alpha \le 3$ и $\beta = 4\alpha^{-1}$.

Для описания всех Парето-оптимальных решений рассмотрим матрицу

$$\alpha^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T = \alpha^{-1}\boldsymbol{A} \oplus (-4)\alpha\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T$$

С учетом условия $8/3 \le \alpha \le 3$ эта матрица и ее квадрат принимают вид

$$\begin{pmatrix} (-4)\alpha & 2\alpha^{-1} & 3\alpha^{-1} \\ (-4)\alpha & (-4)\alpha & 4\alpha^{-1} \\ 2\alpha^{-1} & (-4)\alpha & (-4)\alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5\alpha^{-2} & -1 & 6\alpha^{-2} \\ 6\alpha^{-2} & 0 & 0 \\ -2 & 4\alpha^{-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисление матрицы Клини дает следующий результат:

$$(\alpha^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T)^* = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha^{-1} & 6\alpha^{-2} \\ 6\alpha^{-2} & 0 & 4\alpha^{-1} \\ 2\alpha^{-1} & (-4)\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем решение задачи с помощью формул (9) в виде

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha^{-1} & 6\alpha^{-2} \\ 6\alpha^{-2} & 0 & 4\alpha^{-1} \\ 2\alpha^{-1} & (-4)\alpha & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}, \qquad 8/3 \le \alpha \le 3,$$

где $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ — вектор параметров, который удовлетворяет ограничениям в виде неравенства $\boldsymbol{u}' \le \boldsymbol{u} \le \boldsymbol{u}''$ с верхней и нижней границами, заданными векторами

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}'' = (\boldsymbol{h}^-(\alpha^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T)^*)^- = \begin{pmatrix} (-1)\alpha \\ 5\alpha^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что второй и третий столбцы в матрице Клини коллинеарны, ее можно представить с использованием обозначения $\mathbb{0} = -\infty$ в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\alpha^{-1} & 6\alpha^{-2} \\ 6\alpha^{-2} & 0 & 4\alpha^{-1} \\ 2\alpha^{-1} & (-4)\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha^{-1} \\ 6\alpha^{-2} & 0 \\ 2\alpha^{-1} & (-4)\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & 0 & 4\alpha^{-1} \end{pmatrix}.$$

Введем новый вектор параметров $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)^T$, заданный равенством

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & 0 & 4\alpha^{-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{u}.$$

Заменяя вектор параметров $\boldsymbol{u}$ на $\boldsymbol{w}$, получим решение в виде

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha^{-1} \\ 6\alpha^{-2} & 0 \\ 2\alpha^{-1} & (-4)\alpha \end{pmatrix} \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{w}' \le \boldsymbol{w} \le \boldsymbol{w}'', \qquad 8/3 \le \alpha \le 3,$$

где ограничения на $\boldsymbol{w}$ определяются на основе векторов $\boldsymbol{u}'$ и $\boldsymbol{u}''$ так:

$$\boldsymbol{w}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 5\alpha^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}'' = \begin{pmatrix} (-1)\alpha \\ 5\alpha^{-1} \end{pmatrix}.$$

Все Парето-оптимальные решения задачи теперь можно представить в виде

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha^{-1} \\ 6\alpha^{-2} & 0 \\ 2\alpha^{-1} & (-4)\alpha \end{pmatrix} \boldsymbol{w}, \qquad 1 \le w_1 \le (-1)\alpha, \qquad w_2 = 5\alpha^{-1}, \qquad \text{ă}8/3 \le \alpha \le 3.$$

Записывая полученное решение в скалярной форме с подстановкой $w_2 = 5\alpha^{-1}$ и заменой w_1 на w, получим

$$x_1 = w \oplus 7\alpha^{-2}, \qquad x_2 = 6\alpha^{-2} w \oplus 5\alpha^{-1}, \qquad x_3 = 2\alpha^{-1} w \oplus 1.$$

В силу неравенств $1 \le w \le (-1)\alpha$ и $8/3 \le \alpha \le 3$ выполняются соотношения:

$$7\alpha^{-2} \le 1 \le w, \qquad 6\alpha^{-2} w \le 6\alpha^{-2}(-1)\alpha = 5\alpha^{-1}, \qquad 2\alpha^{-1} w \le 2\alpha^{-1}(-1)\alpha = 1,$$

откуда следует, что Парето-оптимальное решение можно еще более упростить так

$$1 \le x_1 \le (-1)\alpha, \qquad x_2 = 5\alpha^{-1}, \qquad x_3 = 1, \qquad 8/3 \le \alpha \le 3.$$

В заключение представим решения, соответствующие двум крайним и одной внутренней точкам Парето-фронта. Рассмотрим точку (α, β), где $\alpha = 8/3$ и $\beta = 4\alpha^{-1} = 4/3$, что соответствует наилучшему решению относительно минимума максимального времени цикла. Этой точке отвечает Парето-оптимальное решение со значениями неизвестных $1 \leq x_1 \leq 5/3$, $x_2 = 7/3$ и $x_3 = 1$.

Решение, для которого $\alpha = 3$ и $\beta = 4\alpha^{-1} = 1$, является наилучшим с точки зрения минимизации разброса времени начала работ проекта и записывается в виде $1 \leq x_1 \leq 2$, $x_2 = 3$ и $x_3 = 1$

Для внутренней точки Парето-фронта с координатами $\alpha = 17/6$ и $\beta = 4\alpha^{-1} = 7/6$ имеем решение $1 \leq x_1 \leq 11/6$, $x_2 = 13/6$ и $x_3 = 1$.

6.2. Минимизации длительности проекта и разброса времени начала работ

Рассмотрим задачу (10) минимизации общей продолжительности проекта и разброса времени начала работ. Пусть имеется проект с таким же числом работ, ограничениями, матрицей $\boldsymbol{A}$, а также векторами $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$, что и в предыдущем примере.

Чтобы найти оптимальный план работ, минимизирующий продолжительность проекта и разброс времени начала работ, будем использовать лемму 2. Сначала проведем аналогичные предыдущему примеру вычисления. В частности, найдем

$$\|\boldsymbol{A}\| = 4, \qquad \|\boldsymbol{h}^-\| = -1, \qquad \|\boldsymbol{g}\| = 2, \qquad \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}\| = 5.$$

Используя формулы (11), вычислим

$$\lambda = 4, \qquad \mu = 4, \qquad \nu = 1.$$

По лемме 2 Парето-фронт задачи является точкой (α, β), где $\alpha = 4$ и $\beta = 1$.

Чтобы описать все Парето-оптимальные решения, составим матрицу

$$\boldsymbol{I} \oplus \alpha^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи записывается в параметрической форме

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{u} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что для вектора параметров выполняются условия $1 \leq u_1 \leq 2$, $u_2 = 2$ и $u_3 = 1$, приходим к решению задачи в скалярной форме

$$1 \leq x_1 \leq 2, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = 1.$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследованы двухкритериальные задачи планирования проектов, которые состоят в нахождении оптимального плана работ с учетом действующих ограничений. Рассматривались две различные постановки: первая предполагала одновременную минимизацию времени цикла проекта и разброса времени начала работ, вторая — минимизацию общей продолжительности проекта совместно с минимизацией разброса времени начала работ. Сформулированные двухкритериальные задачи были преобразованы в форму, пригодную для анализа средствами (max, +)-алгебры. Этот подход позволил построить для них аналитические решения с использованием методов тропической оптимизации. Полученные решения дают полное параметрическое описание Парето-фронта задачи, что является важным для выбора практически значимых компромиссных планов.

Полученные результаты демонстрируют возможности аналитического подхода к решению задач многокритериальной оптимизации при помощи инструментов тропической алгебры. Эти решения могут быть использованы в системах поддержки принятия решений в управлении проектами и других прикладных областях, где актуальны подобные оптимизационные задачи.

Список литературы

1. *Kerzner H.* Project management: A Systems Approach to Planning, Scheduling, and Controlling. 13th ed. Hoboken: Wiley, 2022.
2. *Kelley J. E.* The critical path method: resources planning and scheduling // Industrial Scheduling / Ed. by J. F. Muth and G. L. Thompson. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1963. P. 347–365.
3. *Malcolm D. G., Roseboom J. H., Clark C. E., Fazar W.* Application of a technique for research and development program evaluation // Operations Research. 1959. Vol. 7, № 5. P. 646–669. doi:10.1287/opre.7.5.646
4. *Moder J. J., Phillips C. R.* Project Management with CPM and PERT. New York: Van Nostrand, 1970.
5. *Demeulemeester E. L., Herroelen W. S.* Project Scheduling. Vol. 49 of International Series in Operations Research and Management Science. New York: Springer, 2002. doi:10.1007/b101924
6. *T'kindt V., Billaut J.-C.* Multicriteria Scheduling. 2nd ed. Berlin: Springer, 2006. doi:10.1007/b106275
7. *Vanhoucke M.* Project Management with Dynamic Scheduling. Berlin: Springer, 2012. doi:10.1007/978-3-642-40438-2
8. *Luc D. T.* Pareto optimality // Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria / Ed. by A. Chinchuluun, P. M. Pardalos, A. Migdalas, L. Pitsoulis. New York: Springer, 2008. P. 481–515. doi:10.1007/978-0-387-77247-9_18
9. *Ehrgott M.* Multicriteria Optimization. 2nd ed. Berlin: Springer, 2005. 323 p. doi:10.1007/3-540-27659-9
10. *Baccelli F. L., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P.* Synchronization and Linearity. Wiley Series in Probability and Statistics. Chichester: Wiley, 1993. 524 p. doi:10.2307/2583959
11. *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 304 с.
12. *Golan J. S.* Semirings and Affine Equations Over Them. Vol. 556 of Mathematics and Its Applications. New York: Springer, 2003. doi:10.1007/978-94-017-0383-3
13. *Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J.* Max Plus at Work. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton: Princeton Univ. Press, 2006. doi:10.1515/9781400865239
14. *Кривулин Н. К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009.
15. *Butkovič P.* Max-Linear Systems. Springer Monographs in Mathematics. London: Springer, 2010. doi:10.1007/978-1-84996-299-5
16. *Bouquard J.-L., Lenté C., Billaut J.-C.* Application of an optimization problem in max-plus algebra to scheduling problems // Discrete Applied Mathematics. 2006. Vol. 154, № 15. P. 2064—2079. doi:10.1016/j.dam.2005.04.011
17. *Singh M., Judd R. P.* Efficient calculation of the makespan for job-shop systems without recirculation using max-plus algebra // International Journal of Production Research. 2014. Vol. 52, № 19. P. 5880–5894. doi:10.1080/00207543.2014.925600
18. *Goto H.* Forward-compatible framework with critical-chain project management using a max-plus linear representation // Opsearch. 2017. Vol. 54, № 1. P. 201–216. doi:10.1007/s12597-016-0276-3.
19. *Krivulin N.* Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems // Linear Algebra and its Applications. 2015. Vol. 468. P. 211–232. doi:10.1016/j.laa.2014.06.044

20. *Krivulin N.* Tropical optimization problems in time-constrained project scheduling // Optimization. 2017. Vol. 66, № 2. P. 205–224. doi:10.1080/02331934.2016.1264946
21. *Krivulin N.* Tropical optimization problems with application to project scheduling with minimum makespan // Annals of Operations Research. 2017. Vol. 256, № 1. P. 75–92. doi:10.1007/s10479-015-1939-9
22. *Кривулин Н. К., Губанов С. А.* Решение задачи сетевого планирования на основе методов тропической оптимизации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Вып. 3. С. 62–72. doi:10.21638/11701/spbu10.2016.306
23. *Кривулин Н. К., Губанов С. А.* Использование методов тропической оптимизации в задачах сетевого планирования // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13, № 4. С. 384–397. doi:10.21638/11701/spbu10.2017.405
24. *Кривулин Н. К., Губанов С. А.* Алгебраическое решение задачи оптимального планирования сроков проекта в управлении проектами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8(66), № 1. С. 73–87. doi:10.21638/spbu01.2021.107
25. *Губанов С. А.* Алгебраическое решение задач оптимального планирования с учетом директивных сроков начала работ проекта // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9(67), № 4. С. 602–611. doi:10.21638/spbu01.2022.403
26. *Krivulin N.* Tropical optimization technique in bi-objective project scheduling under temporal constraints // Comput. Manag. Sci. 2020. Vol. 17, № 3. P. 437–464. doi:10.1007/s10287-020-00374-5
27. *Кривулин Н. К., Цобенко М. А.* Решение двухкритериальной задачи оценки альтернатив с помощью тропической оптимизации // Компьютерные инструменты в образовании 2019. № 4. P. 15–32. doi:10.32603/2071-2340-2019-4-15-32

Поступила в редакцию 25.12.2025, окончательный вариант — 29.01.2026.

Кривулин Николай Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры статистического моделирования, СПбГУ, ✉ nkk@math.spbu.ru

Симоненко Вадим Викторович, бакалавр, кафедра статистического моделирования, СПбГУ, vadimka.simonenko@gmail.com

---

Computer tools in education, 2026
№ 1: 5–21
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2026-1-5-21

Solution of Two-Criteria Project Scheduling Problems Using Methods of Tropical Optimization

Krivulin N. K.[1], ✉ nkk@math.spbu.ru, orcid.org/0000-0003-3070-9355
Simonenko V. V.[1], vadimka.simonenko@gmail.com

[1]Saint Petersburg State University, Universitetskaya nab. 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

Abstract

The paper considers two-criteria problems to schedule a project that consists in performing a given set of activities with restrictions on the start and end times of the activities. The maximum time of the working cycle and the spread of the start time of activities that need to be minimized are taken as the optimality criteria of the plan for one of the problems. The other problem is to minimize the total duration of the project and the spread of the start time of activities. The solution of the problems is based on representation in terms of tropical algebra, which studies algebraic systems with idempotent operations. By applying methods of tropical optimization, results are obtained that analytically describe all Pareto-optimal solutions to the considered problems in parametric form. Illustrative numerical examples of solving two-criteria problems for a project of three activities are given.

Keywords: *tropical optimization, two-criteria optimization problems, Pareto optimality, project scheduling, time constraints.*

Citation: N. K. Krivulin and V. V. Simonenko, "Solution of Two-Criteria Project Scheduling Problems Using Methods of Tropical Optimization," *Computer tools in education*, no. 1, pp. 5–21, 2026; doi:10.32603/2071-2340-2026-1-5-21

References

1. H. Kerzner, *Project management: A Systems Approach to Planning, Scheduling, and Controlling*, 13th ed., Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2022.
2. J. E. Kelley, "The critical path method: resources planning and scheduling," in *Industrial Scheduling*, J. F. Muth and G. L. Thompson eds., Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 1963, pp. 347–365.
3. D. G. Malcolm, J. H. Roseboom, C. E. Clark, and W. Fazar, "Application of a technique for research and development program evaluation," *Operations Research*, vol. 7, no. 5, pp. 646–669, 1959; doi: 10.1287/opre.7.5.646
4. J. J. Moder and C. R. Phillips, *Project Management with CPM and PERT*, 2nd ed., New York, NY, USA: Van Nostrand, 1970.
5. E. L. Demeulemeester and W. S. Herroelen, *Project Scheduling.* vol. 49 of International Series in Operations Research and Management Science, New York, NY, USA: Springer, 2002; doi:10.1007/b101924
6. V. T'kindt and J.-C. Billaut, *Multicriteria Scheduling*, 2nd ed., Berlin: Springer, 2006; doi:10.1007/b106275
7. M. Vanhoucke, *Project Management with Dynamic Scheduling*, Berlin: Springer, 2012; doi:10.1007/978-3-642-40438-2
8. D. T. Luc, "Pareto optimality," in *Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria,* A. Chinchuluun et al. eds., New York, NY, USA: Springer, 2008, pp. 481–515; doi:10.1007/978-0-387-77247-9_18
9. M. Ehrgott, *Multicriteria Optimization,* 2nd ed., Berlin: Springer, 2005; doi:10.1007/3-540-27659-9
10. F. L. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, and J.-P. Quadrat, *Synchronization and Linearity.* Wiley Series in Probability and Statistics, Chichester, UK: Wiley, 1993; doi:10.2307/2583959
11. V. P. Maslov and V. N. Kolokol'tsov, *Idempotentnyi analiz i ego primenenie v optimal'nom upravlenii* [Idempotent analysis and its application in optimal control], Moscow: Fizmatlit, 1994 (in Russian).
12. J. S. Golan, *Semirings and affine equations over them*, Mathematics and Its Applications, vol. 556, New York, NY, USA: Springer, 2003; doi:10.1007/978-94-017-0383-3
13. B. Heidergott, G. J. Olsder, and J. van der Woude, *Max Plus at Work.* Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton, NJ, USA: Princeton Univ. Press, 2006; doi:10.1515/9781400865239
14. N. K. Krivulin, *Metody idempotentnoi algebry v zadachakh modelirovaniya i analiza slozhnykh sistem* [Idempotent algebra methods in modeling and analysis of complex systems], St. Petersburg, Russia: Izdatel'stvo Sankt-Peterburgskogo universiteta, 2009 (in Russian).
15. P. Butkovič, *Max-Linear Systems.* Springer Monographs in Mathematics, London: Springer, 2010; doi:10.1007/978-1-84996-299-5
16. J.-L. Bouquard, C. Lenté, and J.-C. Billaut, "Application of an optimization problem in max-plus algebra to scheduling problems," *Discrete Applied Mathematics,* vol. 154, no. 15, pp. 2064—2079, 2006; doi:10.1016/j.dam.2005.04.011

17. M. Singh and R. P. Judd, “Efficient calculation of the makespan for job-shop systems without recirculation using max-plus algebra,” *International Journal of Production Research,* vol. 52, no. 19, pp. 5880–5894, 2014; doi:10.1080/00207543.2014.925600
18. H. Goto, “Forward-compatible framework with critical-chain project management using a max-plus linear representation,” *Opsearch,* vol. 54, no. 1, pp. 201–216, 2017; doi:10.1007/s12597-016-0276-3
19. N. Krivulin, “Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems,” *Linear Algebra and its Applications,* vol. 468, pp. 211–232, 2015; doi:10.1016/j.laa.2014.06.044
20. N. Krivulin, “Tropical optimization problems in time-constrained project scheduling,” *Optimization,* vol. 66, no. 2, pp. 205–224, 2017; doi:10.1080/02331934.2016.1264946
21. N. Krivulin, “Tropical optimization problems with application to project scheduling with minimum makespan,” *Annals of Operations Research,* vol. 256, no. 1, pp. 75–92, 2017; doi:10.1007/s10479-015-1939-9
22. N. K. Krivulin and S. A. Gubanov, “Solution of a project scheduling problem by using methods of tropical mathematics,” *Vestnik of St Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes,* no. 3, pp. 62–72, 2016 (in Russian); doi:10.21638/11701/spbu10.2016.306
23. N. K. Krivulin and S. A. Gubanov, “The use of tropical optimization methods in problems of project scheduling,” *Vestnik of St Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes,* vol. 13, no. 4, pp. 384–397, 2017 (in Russian); doi:10.21638/11701/spbu10.2017.405
24. N. K. Krivulin and S. A. Gubanov, “Algebraic solution of a problem of optimal project scheduling in project management,” *Vestnik of St Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy,* vol. 8(66), no. 1, pp. 73–87, 2021 (in Russian); doi:10.21638/spbu01.2021.107
25. S. A. Gubanov, “Algebraic solution to optimal scheduling problems taking into account the scheduled start time of jobs in projects,” *Vestnik of St Petersburg University. Mathematics. Mechanocs. Astronomy,* vol. 9(67), no. 4, pp. 602–611, 2022 (in Russian); doi:10.21638/spbu01.2022.403
26. N. Krivulin, “Tropical optimization technique in bi-objective project scheduling under temporal constraints,” *Computational Management Science,* vol. 17, no. 3, pp. 437–464, 2020; doi:10.1007/s10287-020-00374-5
27. N. K. Krivulin and M. A. Tsobenko, “Solution of the two-criteria problem of rating alternatives using tropical optimization,” *Computer Tools in Education,* no. 4, pp. 15–32, 2019 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2019-4-15-32

Received 25-12-2025, the final version — 29-01-2026.

Nikolai Krivulin, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor at the Department of Statistical Modeling, St. Petersburg State University, ✉ nkk@math.spbu.ru

Vadim Simonenko, Bachelor’s degree from the Department of Statistical Modeling, St. Petersburg State University, vadimka.simonenko@gmail.com